

10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. Даны различные действительные числа a и b . Верно ли, что хотя бы одно из уравнений $(x + a)(x + b) = x - a$, $(x - a)(x - b) = x + b$ имеет решение?

3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M , а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N . Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

5. Положительные числа a , b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{2 + ab} + \frac{1}{2 + bc} + \frac{1}{2 + ca} \geq 1.$$

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.

Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.

Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.